

**Exame final nacional de Matemática A (2024, Época especial)**  
Proposta de resolução



1. De acordo com a definição por recorrência, calculamos o segundo e o terceiro termo da sucessão:

- $a_1 = 3$  ;
- $a_2 = 2 \times u_1 + 2 = 2(3) + 2 = 8$  ;
- $a_3 = 2 \times u_2 + 2 = 2(8) + 2 = 18$  ;

Resposta: **Opção C**

2.

2.1. Como sabemos que:

- a linha que tem 19 cartões, é a linha cujo segundo número número é 18, ou seja, a linha em que os números são da forma  ${}^{18}C_p$ ;
- o quarto de número de cada linha, quando existe, é da forma  ${}^nC_3$  ;

Temos que: o quarto número da linha que contém, exatamente, 19 cartões, é:

$${}^{18}C_3 = 816$$

Resposta: **Opção A**

2.2. Como sabemos que em cada linha o número de cartões é superior ao da linha anterior em uma unidade, o número de cartões em cada linha é uma progressão aritmética de razão 1 e cujo primeiro termo é 1, temos que:

- o número de cartões na última linha da figura,  $n$ , é dado pelo termo geral:

$$c_n = 1 + (n - 1) \times 1 = 1 + n - 1 = n$$

- a soma de  $n$  termos desta progressão aritmética, ou seja, o número total de cartões usados para uma figura com  $n$  linhas, é:

$$S_n = 3081$$

Assim, resolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} S_n = 3081 &\Leftrightarrow \frac{c_1 + c_n}{2} \times n = 3081 \Leftrightarrow \frac{1 + n}{2} \times n = 3081 \Leftrightarrow n(1 + n) = 3081 \times 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n + n^2 = 6162 \Leftrightarrow n^2 + n - 6162 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6162)}}{2(1)} \Leftrightarrow n = 78 \vee n = -79 \end{aligned}$$

Como  $n$  é a ordem de uma sucessão, é um valor natural, pelo que,  $n \neq -79$ , ou seja,  $n = 78$ .

3.

3.1. Para averiguar se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar se  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = \frac{4 \cos 0}{\operatorname{sen} 0 - 2} = \frac{4 \times 1}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos x}{\operatorname{sen} x - 2} = \frac{4 \cos 0^+}{\operatorname{sen} 0^+ - 2} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{6x}}{3x} = \frac{1 - e^{6 \times 0^-}}{3 \times 0^-} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{6x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{6x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-(-1 + e^{6x})}{3x} \times \frac{2}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -2 \times \frac{e^{6x} - 1}{6x} \right) =$$

(considerando  $y = 6x$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} -2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -2 \times 1 = -2$$

Como  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , então a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

3.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $f$ , para  $x \in ]0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{4 \cos x}{\operatorname{sen} x - 2} \right)' = \frac{(4 \cos x)' (\operatorname{sen} x - 2) - (4 \cos x) (\operatorname{sen} x - 2)'}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \\ &= \frac{4 (\cos x)' (\operatorname{sen} x - 2) - (4 \cos x) ((\operatorname{sen} x)' - (2)')} {(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \frac{4 (-\operatorname{sen} x) (\operatorname{sen} x - 2) - (4 \cos x) (\cos x - 0)}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \\ &= \frac{-4 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 4 \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \frac{-4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \frac{-4}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} \times (1 - 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função  $f$ , em  $x \in ]0, 2\pi]$  :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{-4}{(\operatorname{sen} x - 2)^2}}_{\text{Cond. impossível}} = 0 \vee 1 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, como  $x \in ]0, 2\pi]$ , as únicas soluções da equação são  $x = \frac{\pi}{6}$   $\vee x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $(k = 0)$ .

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$2\pi$
$\frac{-4}{(\operatorname{sen} x - 2)^2}$	n.d.	-	-	-	-	-	-
$1 - 2 \operatorname{sen} x$	n.d.	+	0	-	0	+	+
$f'$	n.d.	-	0	+	0	-	-
$f$	n.d.	↗	min.	↗	Máx.	↘	min.

Assim, podemos concluir que a função  $f$ :

- é crescente no intervalo  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$ ;
- é decrescente no intervalo  $\left] 0, \frac{\pi}{6} \right]$  e no intervalo  $\left[ \frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$ ;
- tem extremos relativos para:  $x = \frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$  e  $x = 2\pi$ .



4.

- 4.1. Designando por  $a$  o número de bolas amarela inicialmente existentes no saco e por  $v$  o número de bolas verdes inicialmente existentes no saco, temos que:

- $P(A) = \frac{a}{a+v}$
- $P(B|A) = \frac{a-1}{a-1+v}$

E assim, como  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ , e como  $a \geq 1$  e  $v \geq 1$ , então  $a-1+v \geq 1$ , ou seja,  $a-1+v \neq 0$  e assim vem que:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow P(A) \times P(B|A) = \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{\frac{2}{3}P(A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+v} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(a-1) = 2(a-1+v) \Leftrightarrow 3a-3 = 2a-2+2v \Leftrightarrow a = 2v+1 \end{aligned}$$

Logo, como  $v$  é um número natural,  $2v$  é um número par, e  $2v+1$  é um número ímpar, ou seja, o número de bolas amarela inicialmente existentes no saco,  $a$ , é um número ímpar.

- 4.2. Como estão no saco 200 bolas e 49% são verdes, sabemos que o conteúdo do saco é constituído por:

- $200 \times 0,49 = 98$  bolas verdes, e
- $200 - 98 = 102$  bolas amarelas.

Assim, extraindo ao acaso 4 bolas do saco, o número de conjuntos diferentes que é possível formar, ou seja, o número de casos possíveis, é  ${}^{200}C_4$ .

O número destes conjuntos que contém, pelo menos, 3 bolas verdes, é a soma dos conjuntos que contêm 3 bolas verdes e 1 amarela com os conjuntos formados por 4 bolas verdes. Ou seja, o número de casos favoráveis, é  ${}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4$ .

Assim, a probabilidade do conjunto das 4 quatro bolas conter, pelo menos, três bolas verdes, na forma de dízima, arredondado às décimas, é:

$$\frac{{}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4}{{}^{200}C_4} \approx 0,3$$

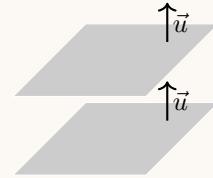
5.

- 5.1. Como a equação que define o plano que contém a base do cone é  $x + 2y - 8 = 0$ , o vetor normal deste plano,  $\vec{u}(1,2,0)$ , também é um vetor normal de qualquer plano paralelo ao plano da base do cone, pelo que a equação do plano que pretendemos definir é da forma:

$$x + 2y + d = 0$$

Como se pretende que o plano contenha o ponto de coordenadas  $(1, -3, 4)$ , podemos determinar o valor do parâmetro  $d$ , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$1 + 2(-3) + d = 0 \Leftrightarrow 1 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$$



E assim, uma equação que define o plano paralelo ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas  $(1, -3, 5)$ , é:

$$x + 2y + 5 = 0$$

Resposta: **Opção C**



5.2. Como os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ambos ao plano definido pela equação  $x - 2y - 8 = 0$ , temos que:

- o ponto  $A$  tem ordenada e cota nulas, porque pertence ao semieixo positivo  $Ox$ , ou seja a sua abcissa é:  $x_A - 2(0) - 8 = 0 \Leftrightarrow x_A = 8$
- o ponto  $B$  tem abcissa e cota nulas, porque pertence ao semieixo positivo  $Oy$ , ou seja a sua ordenada é:  $0 - 2(y_B) - 8 = 0 \Leftrightarrow 2y_B = 8 \Leftrightarrow y_B = \frac{8}{2} \Leftrightarrow y_B = 4$

Determinando as coordenadas do ponto  $M$ , ponto médio do segmento  $[AB]$ , temos:

$$\left( \frac{8+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (4,2,0)$$

Como  $[AB]$  é um diâmetro da base do cone, e o cone é reto, o ponto médio do segmento de reta pertence à reta  $MV$ , perpendicular à base do cone que contém o vértice. Assim, como o vetor normal do plano que contém a base do cone,  $\vec{v}(1,2,0)$ , também é um vetor diretor da reta  $MV$ , uma equação da reta  $MV$  é:

$$(x,y,z) = (4,2,0) + k(1,2,0), k \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas do ponto  $V$ , são da forma  $(4+k, 2+2k, 0)$  e como a sua abcissa tem menos uma unidade do que a sua ordenada, obtemos o valor de  $k$  a que corresponde o ponto  $V$ , resolvendo a equação:

$$4+k = 2+2k-1 \Leftrightarrow 4-2+1 = 2k-k \Leftrightarrow 3 = k$$

Ou seja, as coordenadas do ponto  $V$  são  $(4+3, 2+2(3), 0) = (7, 8, 0)$

6. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos vencimentos (em euros) dos funcionários da área comercial, e noutra lista as frequências absolutas, ou seja, o número de funcionários correspondente a cada valor da lista anterior, e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da mediana, da média e o do desvio padrão, com aproximação às décimas:

$$\tilde{x} = 940; \bar{x} = 955 \text{ e } \sigma \approx 49,58$$

Podemos assim constatar que a média dos vencimentos dos funcionários desta área é inferior ao funcionários da área de produção; e que o desvio padrão dos vencimentos dos funcionários da área de produção é inferior ao desvio padrão dos vencimentos dos funcionários da área comercial.

Podemos ainda observar que nenhum funcionários da área comercial tem um vencimento inferior a 900 euros. Sabemos ainda que existem  $50 - 12 = 38$  funcionários na área de produção e como a mediana dos vencimentos deste funcionários é 900 e nenhum deles tem um vencimento igual a 900 euros, então metade deles tem um vencimento inferior a 900 euros, ou seja,  $\frac{38}{2} = 19$  funcionários da empresa estão nestas condições a que corresponde uma percentagem,  $p$ , relativamente ao total dos funcionários da empresa, calculada por:

$$\frac{50}{19} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 19}{50} \Leftrightarrow p = 38\%$$

Logo, as correspondências corretas são:

- I → b)
- II → a)
- III → c)
- IV → b)



7. Como o ponto  $A$  pertence à circunferência de raio 4, centrada na origem e define com a origem e o semieixo positivo  $Ox$  um ângulo de amplitude  $\alpha$ , as suas coordenadas são  $(4 \cos \alpha, 4 \sin \alpha)$ .

Assim temos que:

- $\overline{AB} = 4 \sin \alpha$
- $\overline{OB} = -4 \cos \alpha$ , porque  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , logo  $\cos \alpha < 0$
- $\overline{BD} = 2\overline{OB} = 2 \times (-4 \cos \alpha) = -8 \cos \alpha$

E assim a área do quadrilátero  $[ABCD]$  pode ser obtida como a soma das áreas dos triângulos  $[ABD]$  e  $[BCD]$ , ou o dobro da área de um deles, porque são congruentes:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= A_{[ABD]} + A_{[BCD]} = 2 \times A_{[ABD]} = 2 \times \frac{\overline{BD} \times \overline{AB}}{2} = \overline{BD} \times \overline{AB} = \\ &= -8 \cos \alpha \times 4 \sin \alpha = -32 \sin \alpha \cos \alpha = -16(2 \sin \alpha \cos \alpha) = -16 \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

8. Como a função  $f$  é polinomial, é contínua em  $\mathbb{R}$ , e em particular no intervalo  $[0,1]$ .

Como  $f(0) < 0 < f(1)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in ]0,1[$  tal que  $f(c) = 0$ , ou seja, que a função  $f$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]0,1[$ .

C.A.

$$f(0) = a(0)^3 + 0 - 2 = -2$$

$$f(1) = a(1)^3 + 1 - 2 = a - 1$$

Como  $a > 1$ , então  $f(1) > 0$

9. As soluções da equação pertencem ao conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x + 1 > 0\}$

Como  $x > 0 \wedge -x > -1 \Leftrightarrow x > -1$ ,

temos que  $x \in ]0, +\infty[ \cap ]-1, +\infty[$  ou seja,  $x \in ]0, +\infty[$ , e resolvendo a equação, vem que:

$$\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 (x+1)^{\frac{1}{2}} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 (x+1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log_2 x - \log_2 (x+1)) = -1 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 (x+1) = -2 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x}{x+1}\right) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 2^{-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{4} \underset{x \neq -1}{\Leftrightarrow} 4x = x+1 \Leftrightarrow 4x - x = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Assim, como  $\frac{1}{3} \in ]0, +\infty[$ , o conjunto solução da equação é  $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ .



10. Como a massa da substância diminui 5% entre os instantes  $a$  e  $3a$ , temos que no instante  $3a$ , a massa da substância corresponde a 95% da massa existente no instante  $a$ , ou seja:

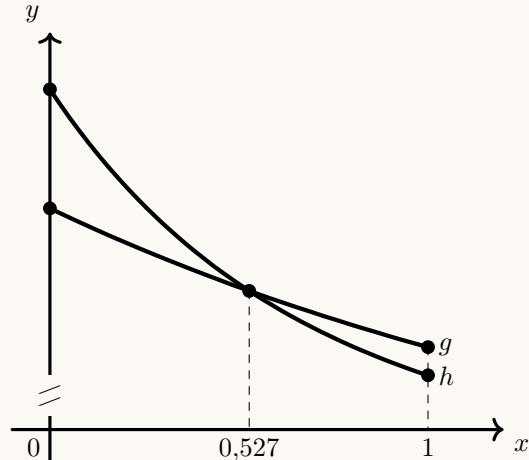
$$m(3a) = 0,95 \times m(a)$$

Desta forma, inserimos na calculadora gráfica a expressão da função  $f(x) = \frac{1764}{1 - 0,16e^{-0,42x}}$ , e visualizamos os gráficos das funções:

- $g(x) = 0,95 \times f(x)$
- $h(x) = f(3x)$

reproduzidos na figura ao lado, para  $0 < x < 1$ , uma vez que o instante  $a$  ocorre no primeiro minuto da reação. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (com três casas decimais) da abscissa do ponto de interseção das funções  $g$  e  $h$ , a que correspondem o instante  $a$ :

$$a \approx 0,527$$



Assim temos que a amplitude do intervalo  $[a, 3a]$ , em minutos, é:

$$3a - a = 2a \approx 2 \times 0,527 \approx 1,054 \text{ min}$$

Como 0,054 minutos correspondem a  $60 \times 0,054 = 3,24$  segundos, a amplitude do intervalo é 1 minuto e 3 segundos.

11. Temos que:

- Como a reta  $r$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 0 e contém um ponto do 4º quadrante, tem declive negativo, pelo que a função  $f$  é decrescente em  $x = 0$ , ou seja,  $f'(0) < 0$ . Assim, a afirmação I. é falsa.
- Como a origem pertence ao gráfico de  $f$ , temos que  $f(0) = 0$  pelo que o declive da reta  $r$  é:

$$m_r = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

Como a reta  $s$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , temos que o declive da reta  $s$  é:

$$m_s = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{8}{9} \Rightarrow m_r \times m_s \neq -1$  pelo que a afirmação II. é falsa.



12. Como  $[ABCD]$  é um losango,  $[AC]$  é uma das diagonais, e como  $\overline{AC} = |z_1 - z_3| = 6$  e o ponto médio de  $[AC]$ , temos que  $\overline{OA} = z_1 = \frac{6}{2} = 3$ .

Temos também que, como o triângulo  $[OAB]$  é retângulo em 0:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow 3^2 + |z_2|^2 = 5^2 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 25 - 9 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{16} \Rightarrow |z_2| = 4$$

Logo,  $|z_2| = 4$  e  $z_2$  é um imaginário puro, então  $z_2 = 4i$ .

Como  $[BD]$  também é uma diagonal do losango que é bissetada na origem pela outra diagonal, então  $\overline{OB} = \overline{OD}$ , ou seja,  $|z_2| = |z_4|$ , pelo que  $z_4 = -4i$ .

Assim, vem que:

$$z_2 \times z_4 = 4i \times (-4i) = -16i^2 = -16 \times (-1) = 16$$

Resposta: **Opção B**

13. Temos que:

- $z^2 = (2e^{i\theta})^2 = 2^2 e^{i\theta \times 2} = 4e^{i(2\theta)}$
- $2z\bar{z} = 2e^{i \times 0} (2e^{i\theta}) (2e^{i(-\theta)}) = 2 \times 2 \times 2e^{i(0+\theta-\theta)} = 8e^{i \times 0} = 8$

Logo, vem que:

$$z^2 + 2z\bar{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 8 - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = -2 + 2\sqrt{3}i$$

Escrevendo  $-2 + 2\sqrt{3}i$  na forma trigonométrica ( $\rho e^{i\alpha}$ ) temos:

- $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \alpha > 0$  e  $\operatorname{cos} \alpha < 0$ ,  $\alpha$  é um ângulo do 2º quadrante, logo  $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Desta forma temos que  $2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ , pelo que:

$$z^2 + 2z\bar{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Logo podemos obter o valor de  $\theta$ :

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{2 \times 3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , para  $k = 0$  temos que  $\theta = \frac{\pi}{3}$



14. Como o domínio da função é  $[0, +\infty[$ , começamos por determinar o declive da assíntota não vertical do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x}}{\sqrt{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(f(x))^2}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} = \end{aligned}$$

Como o gráfico de  $f$  admite uma assíntota horizontal, quando  $x \rightarrow +\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$= \sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}\right)^2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x}} = \sqrt{0^2 + 4 + \frac{5}{+\infty}} = \sqrt{0 + 4 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( \sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} - 2x \right) \times \frac{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} + 2x}{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\left( \sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} \right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x - 4x^2}{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^2 + 5x}{\sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(f(x))^2 + 5x}{x}}{\sqrt{\frac{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x}{x} + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(f(x))^2}{x} + 5}{\sqrt{\frac{(f(x))^2}{x} + 4 + \frac{5}{x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} \times f(x) + 5}{\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} \times f(x) + 5}{\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \times f(x) + 5 \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} + 2 \right)} = \\ &= \frac{0 + 5}{\sqrt{0 + 4 + 0} + 2} = \frac{5}{\sqrt{4} + 2} = \frac{5}{2 + 2} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Desta forma a equação da assíntota não vertical do gráfico de  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , é:

$$y = 2x + \frac{5}{4}$$

